Robot kinematika 1. – Direkt kinematika

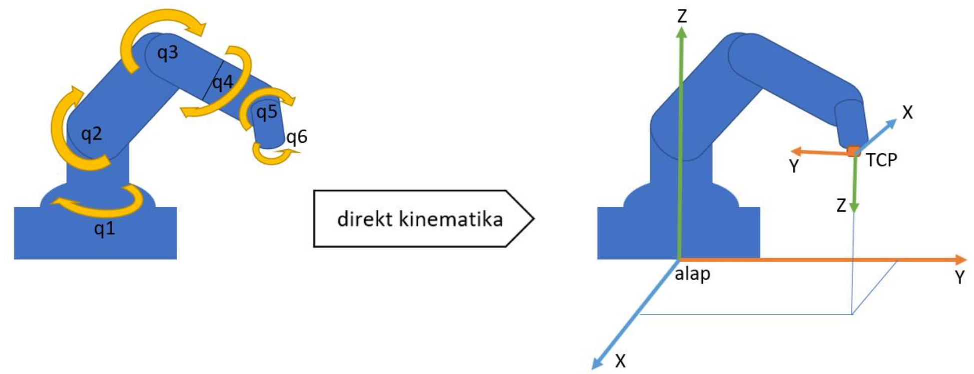
A kinematika a fizika azon részterülete mely a testek mozgásának leírásával foglalkozik. A direkt kinematikai feladat segítségével, a robot tengelyeinek egy adott helyzetéből meghatározható, a TCP pont alap koordináta rendszer szerinti pozíciója, és a szerszám koordináta rendszer pillanatnyi orientációja. Egyszerűbben fogalmazva a tengely szöghelyzetek ismeretében meg tudjuk határozni a robot szerszám helyét és állását.

Jelölések:

q= csuklókoordináta vektor (elemei az egyes tengelyek szöghelyzetei)

s= világ (alap) koordináta vektor (3 db pozíciós és 3 db rotációs paraméter)

Amennyiben szeretnénk tudni, hogy egy adott robot kar (manipulátor) pozíció, milyen térbeli TCP helyzetet eredményez, direkt kinematikai feladatot kell megoldanunk. A kiinduló pontunk a robot fizikai méreteinek ismerete és az egyes csuklók aktuális (pillanatnyi) helyzete vagy állásszöge. A számítások végén pedig megkapjuk az „end effector” vagy szerszám alap koordináta rendszer szerinti helyzetét, ami nem más, mint **az alap és a szerszám koordináta rendszerek origója közötti vektor**. Megkapjuk továbbá a szerszám koordináta rendszer, alap koordináta rendszer tengelyeihez viszonyított elfordulását, vagyis **a rotáció**t.



A részletes matematikai levezetést itt nem szeretném ismertetni, most csak a matematikai eszközöket, és azok alkalmazását mutatnám be, melyek elegendők egy gyakorlati számítás elvégzéséhez.

Direkt kinematikai (forward kinematics) feladat megoldásához rendelkezésünkre áll a Denavit-Hartenberg mátrix. A mátrix segítségével képesek vagyunk tengely szöghelyzet adatokból meghatározni, a TCP pont alap koordináta rendszer szerinti X, Y, Z paramétereit, valamint a szerszám koordináta rendszer θ, ψ, φ, szögeltérését az alap koordináta rendszerhez képest. Az utóbbi három paramétert a szerszám koordináta rendszer módosított Euler szögeinek nevezzük, mely nem más, mint a szerszám koordináta rendszer rotációja (elfordulása).

$$q = |\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \mathrm{q}_3, \mathrm{q}_4, \mathrm{q}_5, \mathrm{q}_6|^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\text{direkt kinematika}} s = |X, Y, Z, \psi, \theta, \varphi|^{\mathrm{T}}$$

Denavit-Hartenberg mátrix

Első lépésben ismerjük meg azt a mátrixot, ami kapcsolatot teremt egyetlen robot csukló fizikai paraméterei és az általa reprezentált Descartes koordináta rendszer szerinti pozíció között.

Jelölések:

${}^{i-1}D_i$= D-H transzformációs mátrix az i-1 tengelytől az i tengelyig

d_i= tengelyek közötti eltolás (offset)

a_i= tengelyek közötti távolság (a link hossza)

α_i= csuklók tengelyvonalai között bezárt szög

Θ_i= i-edik csukló koordinátája (az i-edik tengely szöghelyzete)

A D-H transzformációs mátrix egy robot szegmenshez (a robot test egy merev tagja melyet jellemzően „kar"-nak nevezünk) tartozó két csukló (tengely) közötti koordináta transzformációra ad megoldást. A teljes robot kar mozgásának meghatározásához az összes csuklóra vonatkozó D-H mátrix kiszámítása és ezek szorzatának meghatározása szükséges.

A robot fizikai kialakításából meghatározható paraméterek, melyek a D-H mátrix kiszámításához szükségesek, a d_i , az a_i , az α_i , és a Θ_i .

Az egyes paraméterek magyarázata a következő:

d_i , és az a_i = távolság paraméterek. Az a_i a tengelyek közötti távolságot, vagyis a link hosszát, a d_i a tengelyek közötti síkbeli eltolást (offset) jelenti.

Az a_i vagyis a tengelyek közötti távolságot mindig az <u>i-edik csukló X tengelye mentén</u> mérjük.

Az d_i vagyis a tengelyek közötti eltolást mindig az <u>i-1-edik csukló Z tengelye mentén</u> mérjük.

α_i = az i-edik és az i+1-edik csukló tengelyvonalai között bezárt szög. Valós robotok esetén ez jellemzően 0° vagy 90°. Érdemes megjegyezni, hogy a paraméter mindig a vizsgált és az őt követő csuklók tengelyvonalai közötti összefüggést mutatja, így az α_{i-1} adja az i-1-edik és i-edik tengelyvonalak közötti szöget.

Θ_i = az i-edik tengely szöghelyzete. Könnyen elérhető paraméter, aktuális értéke jellemzően közvetlenül leolvasható a robot vezérlőről. A tengelyek q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 paraméterét jelenti.

A Denavit-Hartenberg mátrix rotációs csukló esetén a következő:

$$^{i-1}D_{i(\mathrm{r})} = \begin{bmatrix} cos\Theta_i & -sin\Theta_i cos\alpha_i & sin\Theta_i sin\alpha_i & a_i cos\Theta_i \\ sin\Theta_i & cos\Theta_i cos\alpha_i & -cos\Theta_i sin\alpha_i & a_i sin\Theta_i \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A Denavit-Hartenberg mátrix transzlációs csukló esetén a következő:

$$^{i-1}D_{i(\mathrm{t})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha_i & -sin\alpha_i & 0 \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Látható. hogy a mátrix jóval egyszerűbb a rotációs csuklónál felírtaknál. Ezt, az paraméterekben bekövetkező változások eredményezik. Az első változás, hogy az a_i paramétert, vagyis a kar hosszát 0-nak tekintjük. A hosszra vonatkozó információ a d_i paraméterben kerül megadásra és a transzlációs tengely kinyúlását adja meg, ugyan úgy ahogy korábban a Θ_i paraméter, a rotációs csukló állásszögét adta meg. A Θ_i paraméter pedig szintén 0, mely abból következik, hogy a transzlációs tengely csak egyenes vonalú mozgásra képes. Az α_i paraméter jelentése változatlan marad.

Összegezve:

$a_i = 0$

d_i = a transzlációs tengely aktuális helyzete, mint hossz paraméter. Itt figyelembe kell venni a tengely minimum helyzetében is megmaradó fizikai test méretét.

$\Theta_i = 0$

Rotációs mátrix

A következő a rotációs mátrix, mely két azonos origóval rendelkező koordináta rendszer egymáshoz képesti elfordulását, rotációját adja meg.

Jelölések:

$$X, Y, Z = nyugvókoordinátarendszeregységvektorai$$

$$\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3 = szerszámkoordinátarendszeregységvektorai$$

$$^0R_n = \ rotációs\ mátrix$$

$$\psi, \theta, \varphi = módosítottEulerszögek$$

A szerszám koordináta rendszer alap koordináta rendszerhez viszonyított rotációját az alábbi rotációs mátrix adja meg. A „0", vagyis nyugvó koordináta rendszerből rotál az „n" mozgó koordináta rendszerebe.

$$^0R_n = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix}$$

Az e_1, e_2, e_3, a szerszám (mozgó) koordináta rendszer egységvektorai. A mátrix ezen egységvektoroknak, az alap (nyugvó) koordináta rendszerre számított vetületeit adja. Máshogy fogalmazva a mozgó koordináta rendszer minden egyes vektora milyen összefüggést mutat a nyugvó koordináta rendszer minden egyes vektorával. A 2*3 vektor adja a 3X3-as mátrixot eredményül. (Minden tagot minden taggal szorozni kell.)

A rotációs mátrix felírható a három módosított Euler szög használatával is.

$$^0R_n = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi\text{-}\sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi\text{-}\cos\psi\sin\varphi \\ \text{-}\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

A fenti két leírás módot egymással egyenlővé téve, meghatározhatók a szögekre vonatkozó egyenletek. Ezek már végeredményként használhatók a robot karjának beállításához.

$$\psi = tan^{-1}\frac{e_{1y}}{e_{1x}} + 2k\pi$$

$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{-e_{1z}}{e_{1x}\, cos\,\psi + e_{1y}\, sin\,\psi}\right] + 2k\pi$$

$$\varphi = tan^{-1}\frac{e_{2z}}{e_{3z}} + 2k\pi$$

Transzformációs mátrix teljes robot manipulátorra vonatkoztatva

Végül meg kell határozni a teljes robot manipulátorra vonatkozó transzformációs mátrixot. A kapott mátrix magában foglalja a szerszám koordináta rendszer rotációját és origójának helyzetét az alap koordináta rendszerben.

Jelölések:

${}^{0}T_{n}$= homogén transzformációs mátrix a robot alapjától az „n"-edik tengelyig

${}^{0}R_{n}$= rotációs mátrix a robot alapjától az „n"-edik tengelyig

$$
{}^{0}\mathrm{T}_{n} = \begin{bmatrix} & & & X \\ & {}^{0}R_{n} & & Y \\ & & & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Az ${}^{0}R_{n}$ mátrixot behelyettesítve:

$$
{}^{0}\mathrm{T}_{n} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} & X \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} & Y \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

A transzformációs mátrixot az egyes tengelyek D-H mátrixainak szorzataként kapjuk.

$$
{}^{0}\mathrm{T}_{n} = {}^{0}D_{1}\,{}^{1}D_{2}\,{}^{2}D_{3}\ldots{}^{\mathrm{n-2}}D_{\mathrm{n-1}}\,{}^{\mathrm{n-1}}D_{\mathrm{n}}
$$

Ennek megfelelően a szorzat által adott 4X4 mátrixból kiolvashatók a keresett pozícióra vonatkozó adatok.

$$
{}^{0}D_{1}\,{}^{1}D_{2}\,{}^{2}D_{3}\ldots{}^{n-2}D_{n-1}\,{}^{n-1}D_{n} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} & X_{TCP} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} & Y_{TCP} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} & Z_{TCP} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$